**Plan wynikowy**

**Prosto do matury**

**Zakres rozszerzony**

**Klasa 4**

**I. Trygonometria (42 godz.)**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| TEMAT ZAJĘĆ EDUKACYJNYCH | **liczba godzin** | **W zakresie**  **TREŚCI PODSTAWOWYCH** uczeń potrafi: | **W zakresie**  **TREŚCI PONADPODSTAWOWYCH** uczeń potrafi: |
| Przypomnienie wiadomości z trygonometrii kąta wypukłego | 2 |  |  |
| Twierdzenie sinusów | 4 | * stosować twierdzenie sinusów do obliczenia długości boków i miar kątów trójkąta  stosować twierdzenie sinusów w zadaniach osadzonych w kontekście praktycznymstosować twierdzenie sinusów do obliczenia promienia okręgu opisanego na trójkącie | wykorzystywać twierdzenie sinusów w trudniejszych zadaniach (np. w zadaniach na dowodzenie) |
| Twierdzenie cosinusów | 4 | * stosować twierdzenie cosinusów do obliczenia długości boków  i miar kątów trójkąta;  sprawdzać, czy trójkąt o danych bokach jest ostrokątny, prostokątny, czy rozwartokątny. | wyznaczyć długość środkowej trójkąta, mając dane długości jego bokówstosować twierdzenie cosinusów do obliczenia wskazanych wielkości w wielokątachwykorzystywać twierdzenie cosinusów w trudniejszych zadaniach (np. w zadaniach na dowodzenie) |
| Związki miarowe w wielokątach | 4 | * obliczać pole trójkąta na podstawie wzorów:   i * wykorzystywać w zadaniach różne wzory na pole trójkąta  do obliczenia wskazanych wielkości * stosować twierdzenie sinusów i twierdzenie cosinusów w zadaniach dotyczących czworokątów wpisanych w okrąg i czworokątów opisanych na okręgu | stosować w zadaniach twierdzenie o dwusiecznejrozwiązywać wieloetapowe zadanie z planimetrii wymagające np. zastosowania twierdzenia o dwusiecznej, twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów oraz wzorów na pole trójkąta i pole wielokąta |
| Powtórzenie | 2 |  |  |
| ***Praca klasowa  i jej omówienie*** | 2 |  |  |
| Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta | 3 | * poprawnie zaznaczać dowolny kąt w układzie współrzędnych * określać, do której ćwiartki układu współrzędnych należy dany kąt * obliczać wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta * określać znaki wartości funkcji trygonometrycznych danego kąta * konstruować kąt, znając wartość jednej z jego funkcji trygonometrycznych * obliczać wartości funkcji trygonometrycznych kąta, mając dany punkt należący do jego ramienia końcowego * stosować wzory redukcyjne do wyznaczania wartości funkcji sinus, cosinus i tangens dowolnego kąta o mierze wyrażonej w stopniach (przez sprowadzenie do przypadku kąta ostrego) * korzystać z tablic trygonometrycznych do obliczenia wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta | * uzasadniać wzory redukcyjne * stosować wzory redukcyjne do obliczenia wartości wyrażeń, w których występują funkcje trygonometryczne dowolnych kątów * wykorzystywać wzory redukcyjne w zadaniach na dowodzenie |
| Własności funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta | 3 | * zapisywać poprawnie rodzinę przedziałów liczbowych * opisywać własności funkcji okresowych * podawać własności funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta * obliczać wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta, znając wartość jednej z funkcji trygonometrycznych: sinus lub cosinus tego kąta, * uzasadniać proste tożsamości trygonometryczne podając konieczne założenia | szkicować wykres funkcji okresowej o podanych własnościach  obliczać wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta, znając wartości funkcji tangens tego kąta  uzasadnić tożsamości trygonometryczne wymagające przekształcenia wyrażeń wymiernych podając konieczne założenia |
| Miara łukowa kąta | 2 | * zamieniać miarę łukową kąta na miarę stopniową i odwrotnie * wyznaczać wartości funkcji sinus, cosinus i tangens dowolnego kąta o mierze wyrażonej w radianach | * stosować wzory redukcyjne dla kątów o podanej mierze łukowej * stosować funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej w zadaniach różnych typów |
| Wykresy funkcji trygonometrycznych | 3 | * rysować wykresy funkcji sinus, cosinus i tangens; podawać własności tych funkcji * wykorzystywać w zadaniach okresowość funkcji trygonometrycznych * przekształcać wykresy funkcji trygonometrycznych przez przesunięcie równoległe lub symetrię względem osi x, osi y i początku układu współrzędnych * rozwiązywać elementarne równania trygonometryczne, korzystając z wykresu odpowiedniej funkcji trygonometrycznej * rozwiązywać elementarne nierówności trygonometryczne, korzystając z wykresu odpowiedniej funkcji trygonometrycznej | * rysować wykresy funkcji trygonometrycznych  w trudniejszych przypadkach (np. z wartością bezwzględną) * określać na podstawie wykresu złożonej funkcji trygonometrycznej jej własności, np. podawać przedziały monotoniczności , wskazywać wartości: najmniejszą i największą w danym przedziale domkniętym, odczytywać miejsca zerowe, podawać równanie asymptot pionowych wykresu * rozwiązywać zadanie z parametrem dotyczące wykresów funkcji trygonometrycznych |
| Sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów. Funkcje kąta podwojonego | 3 | * wykorzystywać w prostych przypadkach wzory na sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów * wykorzystywać w prostych zadaniach wzory na sinus, cosinus  i tangens kąta podwojonego | * wykorzystywać wzory na sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów oraz kąta podwojonego w zadaniach na dowodzenie * obliczać wartości wyrażeń, wykorzystując wzory na sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów oraz kąta podwojonego |
| Równania i nierówności trygonometryczne | 6 | * rozwiązywać proste równania trygonometryczne w zbiorze liczb rzeczywistych lub w określonym przedziale * rozwiązywać proste nierówności trygonometryczne w zbiorze liczb rzeczywistych lub w określonym przedziale * rozwiązywać równania trygonometryczne prowadzące do równań kwadratowych | * rozwiązywać równania trygonometryczne i nierówności trygonometryczne wymagające zastosowania wzorów  na sinus, cosinus lub tangens sumy i różnicy kątów * rozwiązywać równanie trygonometryczne i nierówności trygonometryczne z parametrem |
| Powtórzenie | 2 |  |  |
| ***Praca klasowa  i jej omówienie*** | 2 |  |  |

# III. Ciągi (27 godz.)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| TEMAT ZAJĘĆ EDUKACYJNYCH | **Liczba godzin** | **W zakresie**  **TREŚCI PODSTAWOWYCH** uczeń potrafi: | **W zakresie**  **TREŚCI PONADPODSTAWOWYCH** uczeń potrafi: |
| Określenie i własności ciągu liczbowego | 5 | * obliczyć *n*-ty wyraz ciągu, znając wzór ogólny tego ciągu * zapisywać symbolicznie warunki dotyczące wyrazów ciągu * wyznaczać kolejne wyrazy ciągu na podstawie wzoru rekurencyjnego * rysować wykresy ciągów * odczytywać z wykresu własności ciągu * wyznaczać miejsce zerowe ciągu o danym wzorze ogólnym * obliczać wyrazy ciągu spełniające podany warunek | * badać monotoniczność ciągu * wykazywać, że dany ciąg nie jest monotoniczny * określać monotoniczność ciągu będącego np. sumą dwóch ciągów o ustalonej monotoniczności * podawać przykład wzoru rekurencyjnego ciągu, znając kilka jego początkowych wyrazów * podawać przykłady ciągów monotonicznych tak, aby np. ich iloczyn spełniał określone warunki dotyczące monotoniczności |
| Ciąg arytmetyczny | 4 | * rozpoznawać ciąg arytmetyczny * obliczać wskazane wyrazy ciągu arytmetycznego, mając dany pierwszy wyraz i różnicę ciągu * wyznaczyć ciąg arytmetyczny, znając jego dwa wyrazy * stosować w zadaniach zależność między trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego * określać monotoniczność ciągu arytmetycznego * rozwiązywać zadania tekstowe, wykorzystując wzór na -ty wyraz ciągu arytmetycznego | * stosować w zadaniach zależność między wyrazami ciągu arytmetycznego * wyznaczyć ciąg arytmetyczny, mając podane warunki, jakie spełniają wskazane wyrazy tego ciągu * badać, czy ciąg o podanym wzorze ogólnym jest ciągiem arytmetycznym * stosować własności ciągu arytmetycznego w zadaniach  na dowodzenie  rozwiązywać zadania łączące ciąg arytmetyczny z innymi działami matematyki, np. funkcją kwadratową, geometrią, itp., w tym zadania z parametrem |
| Suma *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego | 4 | * obliczyć sumę *n* początkowych wyrazów danego ciągu arytmetycznego * obliczyć, ile wyrazów danego ciągu arytmetycznego należy dodać, aby otrzymać określoną sumę * rozwiązywać zadania tekstowe, wykorzystując wzór na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego | * obliczać sumę liczb naturalnych o podanych własnościach, np. dwucyfrowych i podzielnych przez 4 * wyznaczyć ciąg arytmetyczny, znając np. jego dwie sumy częściowe * wyznaczyć wzór ogólny ciągu arytmetycznego na podstawie wzoru na jego sumę częściową * rozwiązywać równania, wykorzystując wzór na sumę wyrazów ciągu arytmetycznego * stosować wzór na sumę wyrazów ciągu arytmetycznego w zadaniach na dowodzenie |
| Ciąg geometryczny | 4 | * rozpoznawać ciąg geometryczny * obliczać wskazane wyrazy ciągu geometrycznego, mając dany pierwszy wyraz i iloraz ciągu * wyznaczyć ciąg geometryczny, znając jego dwa wyrazy * stosować w zadaniach zależność między trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego * określać monotoniczność ciągu geometrycznego * rozwiązywać zadania tekstowe, wykorzystując wzór na -ty wyraz ciągu geometrycznego * rozwiązywać zadania wymagające jednoczesnego stosowania własności ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego | stosować w zadaniach zależność między wyrazami ciągu geometrycznegorozwiązywać zadania łączące ciąg geometryczny z innymi działami matematyki, np. funkcją kwadratową, geometrią, itp.stosować własności ciągu geometrycznego w zadaniach na dowodzenie  * stosować własności ciągu geometrycznego w zadaniach na dowodzenie * badać, czy ciąg o podanym wzorze ogólnym jest ciągiem geometrycznym |
| Suma *n* początkowych wyrazów ciągu geometrycznego | 4 | * obliczyć sumę *n* początkowych wyrazów danego ciągu geometrycznego * rozwiązywać zadania tekstowe, wykorzystując wzór na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu geometrycznego | * stosować własności ciągu geometrycznego w trudniejszych zadaniach, np. obliczyć sumę *n* początkowych wyrazów ciągu 1,11,111,… * obliczyć, ile wyrazów danego ciągu geometrycznego należy dodać, aby otrzymać określoną sumę * rozwiązywać równania, wykorzystując wzór na sumę wyrazów ciągu geometrycznego |
| Oszczędzanie i kredyty  w bankach | 2 | * wyznaczać wielkości zmieniające się zgodnie z zasadą procentu składanego * obliczyć wartość lokaty, znając stopę procentową,  okres rozrachunkowy i czas oszczędzania * obliczyć wartość lokaty o zmieniającym się oprocentowaniu | * porównywać zyski z różnych lokat * obliczyć wysokość raty kredytu spłacanego (w równych wielkościach) systemem procentu składanego * obliczać wysokości rat malejących |
| Powtórzenie | 2 |  |  |
| ***Praca klasowa  i jej omówienie*** | 2 |  |  |

# IV. Analiza matematyczna (45 godz.)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| TEMAT ZAJĘĆ EDUKACYJNYCH | **liczba godzin** | **W zakresie**  **TREŚCI PODSTAWOWYCH** uczeń potrafi: | **W zakresie**  **TREŚCI PONADPODSTAWOWYCH** uczeń potrafi: |
| Granica ciągu | 4 | * opisywać poglądowo pojęcie granicy ciągu * poprawnie stosować symboliczny zapis granicy ciągu i granicy niewłaściwej * odróżniać ciągi zbieżne i ciągi rozbieżne * obliczać granice ciągów z wykorzystaniem granic ciągów typu , , , * obliczać granice ciągów stosując twierdzenia o działaniach na granicach ciągów zbieżnych * wskazywać ciąg geometryczny zbieżny * wyznaczać granicę niewłaściwą ciągu | * obliczać granice ciągów (właściwe  i niewłaściwe) na podstawie definicji * stosować twierdzenie o własnościach granic niewłaściwych ciągów rozbieżnych * badać, kiedy podany nieskończony ciąg geometryczny jest zbieżny * podawać przykłady ciągów zbieżnych do danej granicy lub rozbieżnych do * obliczać granice ciągów korzystając z twierdzenia o trzech ciągach |
| Szereg geometryczny zbieżny i jego suma | 4 | * rozpoznawać szeregi geometryczne zbieżne * obliczać sumy szeregów geometrycznych zbieżnych * zamieniać ułamek okresowy na ułamek zwykły w prostych przypadkach | * zamieniać ułamek okresowy na ułamek zwykły (w trudniejszych przypadkach) * rozwiązywać zadania z geometrii, korzystając ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego zbieżnego * rozwiązywać równania i nierówności, korzystając ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego zbieżnego |
| Granica funkcji  w punkcie | 3 | * opisywać poglądowo pojęcie granicy funkcji w punkcie * obliczać granice funkcji, wykorzystując twierdzenia o działaniach na granicach w prostych przypadkach * interpretować pojęcie granicy jednostronnej * odczytywać z wykresu funkcji jej granice jednostronne we wskazanych punktach * wyznaczać granice jednostronne funkcji, wykorzystując twierdzenia o działaniach na granicach | * obliczać granice funkcji na podstawie definicji * stosować tw. dotyczące granic niektórych funkcji np. , * stosować tw. dotyczące granic funkcji sinus i cosinus w punkcie * wyznaczać granice jednostronne funkcji na podstawie definicji * uzasadnić, że dana funkcja ma granicę w podanym punkcie * obliczać granice funkcji, wykorzystując twierdzenia o działaniach na granicach w trudniejszych przypadkach |
| Granice niewłaściwe | 3 | * interpretować pojęcie granicy niewłaściwej funkcji w punkcie i w * wyznaczać granice niewłaściwe funkcji, wykorzystując twierdzenia o działaniach na granicach w prostych przypadkach * wyznaczać równania asymptot poziomych i asymptot pionowych wykresu funkcji | * wyznaczać granice niewłaściwe funkcji  na podstawie definicji * wyznaczać granice niewłaściwe jednostronne * wyznaczać granice funkcji na końcach przedziałów określoności * wyznaczać granice niewłaściwe funkcji, wykorzystując twierdzenia o działaniach na granicach w trudniejszych przypadkach * określać własności funkcji (w tym granice na końcach przedziałów określoności) na podstawie jej wykresu |
| Funkcje ciągłe | 4 | * opisywać poglądowa pojęcie funkcji ciągłej w punkcie * badać ciągłość funkcji w punkcie * określać ciągłość funkcji w przedziale | * dobierać odpowiednie wartości parametru tak, aby funkcja była ciągła w danym punkcie * wykorzystywać w zadaniach własności funkcji ciągłych, np. do dowodzenia, że dane równanie ma rozwiązanie oraz do znajdowania wartości najmniejszej i największej funkcji w przedziale domkniętym * szkicować przykładowy wykres funkcji ciągłej o podanych własnościach |
| Powtórzenie | 2 |  |  |
| Praca klasowa  i jej omówienie | 2 |  |  |
| Pochodna funkcji  w punkcie | 3 | * obliczyć iloraz różnicowy i podać interpretację geometryczną otrzymanego wyniku * obliczyć pochodną funkcji w danym punkcie na podstawie definicji w prostych przypadkach * wyznaczyć równanie stycznej do wykresu funkcji w danym punkcie * stosować fizyczną interpretację pochodnej do obliczenia prędkości chwilowej | * obliczać pochodne funkcji w danym punkcie na podstawie definicji w trudniejszych przypadkach; podawać interpretację geometryczną pochodnej funkcji w punkcie * badać różniczkowalność funkcji w danym punkcie * wyznaczać kąt przecięcia wykresów dwóch funkcji |
| Pochodna  jako funkcja | 3 | * wyznaczać pochodne funkcji elementarnych * wyznaczać pochodne funkcji postaci , * wyznaczać pochodne funkcji, korzystając z twierdzenia o działaniach na pochodnych * wyznaczać pochodne wielomianów * wyznaczać pochodne funkcji wymiernych; określać i | * wyznaczać równanie stycznej do wykresu funkcji spełniającej określone warunki * rozwiązywać zadania z parametrem, dotyczące stycznej do wykresu funkcji |
| Pochodna funkcji złożonej | 3 | * określać funkcję wewnętrzną i funkcję zewnętrzną danej funkcji złożonej * wyznaczać dziedzinę funkcji złożonej * wyznaczać pochodne funkcji złożonych w prostych przypadkach * obliczyć wartość pochodnej funkcji złożonej w danym punkcie w prostych przypadkach | * wyznaczać pochodną funkcji złożonej w trudniejszych przypadkach * wykorzystywać pochodną funkcji złożonej w zadaniach dotyczących np. równania stycznej |
| Monotoniczność  i ekstrema funkcji różniczkowalnej | 5 | * wyznaczać przedziały monotoniczności funkcji różniczkowalnych, korzystając z własności pochodnej w prostych przypadkach * posługiwać się pojęciem ekstremum lokalnego * wyznaczać ekstrema funkcji różniczkowalnych, korzystając z warunku koniecznego i warunku wystarczającego istnienia ekstremum | * wyznaczać przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji złożonej * badać przebieg zmienności funkcji wymiernych * wskazywać wykres funkcji na podstawie jej pochodnej * rozwiązywać zadania z parametrem dotyczące przedziałów monotoniczności  i ekstremów funkcji różniczkowalnych |
| Wartość największa  i wartość najmniejsza funkcji | 5 | * wyznaczyć wartość największą i wartość najmniejszą funkcji  w przedziale domkniętym * rozwiązać zadanie optymalizacyjne z wykorzystaniem pochodnej w prostych przypadkach | * rozwiązać zadanie optymalizacyjne, korzystając z własności pochodnej (np. dotyczące geometrii) w trudniejszych przypadkach |
| Powtórzenie | 2 |  |  |
| Praca klasowa  i jej omówienie | 2 |  |  |

**V. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka (21 godz.)**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| TEMAT ZAJĘĆ EDUKACYJNYCH | **liczba godzin** | **W zakresie**  **TREŚCI PODSTAWOWYCH** uczeń potrafi: | **W zakresie**  **TREŚCI PONADPODSTAWOWYCH** uczeń potrafi: |
| Klasyczna definicja prawdopodobieństwa | 2 | * rozpoznawać, czy dana sytuacja jest doświadczeniem losowym * określać zbiór zdarzeń elementarnych dla(?) danego doświadczenia losowego , obliczać liczbę zdarzeń elementarnych * stosować symboliczny opis zbioru zdarzeń elementarnych i zdarzeń, w tym zdarzenia pewnego i zdarzenia niemożliwego * obliczać prawdopodobieństwa zdarzeń z zastosowaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa w prostych doświadczeniach losowych (rzut monetą, rzut kostką, losowanie jednego spośród *n* przedmiotów itp.) | * uzasadnić, że dla zdarzenia w dowolnym doświadczeniu losowym |
| Reguła mnożenia i reguła dodawania | 3 | * stosować w prostych przypadkach regułę mnożenia * wykorzystywać drzewko do zliczania obiektów w prostych sytuacjach kombinatorycznych * stosować regułę dodawania * odróżniać losowanie ze zwracaniem i losowanie bez zwracania | * stosować regułę mnożenia i regułę dodawania w bardziej złożonych zadaniach * rozwiązywać zadania dotyczące liczby podzbiorów danego zbioru |
| Obliczanie prawdopodobieństwa | 3 | * obliczać prawdopodobieństwa zdarzeń z zastosowaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa w typowych doświadczeniach losowych | * dobierać odpowiedni model do mniej typowego zadania z zastosowaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa |
| Własności prawdopodobieństwa | 2 | * wyznaczać sumę, iloczyn, różnicę danych zdarzeń * rozpoznawać zdarzenia wykluczające się * stosować w zadaniach wzór na prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego * stosować w zadaniach wzór na prawdopodobieństwo sumy dwóch zdarzeń | * stosować w zadaniach wzór na prawdopodobieństwo sumy dwóch zdarzeń lub wzór na prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego * opisywać słowami zdarzenia zapisane symbolicznie z wykorzystaniem działań na zdarzeniach * uzasadniać, że dane zdarzenia się wykluczają * wykorzystywać własności prawdopodobieństwa w zadaniach na dowodzenie * rozwiązywać trudniejsze zadania, stosując własności prawdopodobieństwa |
| Wartość oczekiwana w prostych grach losowych | 2 | * wyznaczać wartość oczekiwaną w prostych grach losowych * sprawdzać, czy dana gra losowa jest sprawiedliwa | * wyznaczać wartość oczekiwaną w bardziej złożonych grach losowych |
| Mediana, średnia  i dominanta | 2 | * przedstawiać dane surowe w postaci szeregu uporządkowanego * wyznaczać medianę, dominantę średnią i rozstęp zestawu danych * obliczać średnią ważoną wyników | * stosować w zadaniach siatkę centylową * rozwiązywać trudniejsze zadania dotyczące średniej ważonej (np. znajdować brakujące wagi) |
| Miary rozproszenia | 2 | * obliczać wariancję i odchylenie standardowe zestawu danych * sporządzać diagramy częstości * odczytywać informacje z diagramów częstości * porównywać różne zestawy danych surowych na podstawie opisujących je parametrów | * podawać przykłady zestawu danych  o ustalonych parametrach statystycznych * obliczać przeciętne odchylenie od średniej * wyjaśniać, na czym polega manipulacja danymi na nierzetelnie przedstawionych wykresach i diagramach * interpretować parametry statystyczne |
| Powtórzenie | 2 |  |  |
| Praca klasowa  i jej omówienie | 2 |  |  |