Piotr Grabowski

Program nauczania matematyki w zakresie podstawowym  
dla szkoły ponadpodstawowej

Prosto do matury

logoNE_rgb

© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o.  
Warszawa 2019

Spis treści

[Wstęp 3](#_Toc1574607)

[Cele kształcenia 3](#_Toc1574608)

[Procedury osiągania celów 5](#_Toc1574609)

[Materiał nauczania i przewidywane umiejętności uczniów 6](#_Toc1574610)

[Klasa 1 6](#_Toc1574611)

[Treści nauczania 6](#_Toc1574612)

[Przewidywane umiejętności uczniów 8](#_Toc1574613)

[Klasa 2 11](#_Toc1574614)

[Treści nauczania 11](#_Toc1574615)

[Przewidywane umiejętności uczniów 12](#_Toc1574616)

[Klasa 3 15](#_Toc1574617)

[Treści nauczania 15](#_Toc1574618)

[Przewidywane umiejętności uczniów 16](#_Toc1574619)

[Klasa 4 18](#_Toc1574620)

[Treści nauczania 18](#_Toc1574621)

[Przewidywane umiejętności uczniów 18](#_Toc1574622)

[Propozycja metod kontroli i oceny osiągnięć uczniów 19](#_Toc1574623)

[Orientacyjny przydział godzin lekcyjnych 21](#_Toc1574624)

# Wstęp

*W matematyce umiejętności są znacznie ważniejsze od wiadomości, dlatego też   
w nauczaniu matematyki to, jak uczymy, może być ważniejsze od tego, czego uczymy.*

György Polya

*Program nauczania matematyki w zakresie rozszerzonym dla szkoły ponadpodstawowej* w pełni respektuje założenia reformy szkolnictwa oraz zatwierdzonej przez MEN podstawy programowej kształcenia ogólnego z dn. 5. 07. 2017 r. Treści nauczania zawarte w podręczniku *Prosto  
do matury*  w zasadzie nie wykraczają poza zalecenia podstawy programowej. Matematykę, przedmiot na egzaminie maturalnym obowiązkowy, uczniowie powinni opanować w stopniu co najmniej dostatecznym. Nie jest to zadanie łatwe ani dla uczniów, ani dla pracujących z nimi nauczycieli. Autor prezentowanego programu wyznaje zasadę, że lepiej w podręczniku zawrzeć mniej treści, ale łatwiejszych do przyswojenia i zrozumienia. Wysiłki uczniów i nauczycieli powinny być racjonalne i twórcze, a nie mechaniczne, zwłaszcza że matematyka daje nauczycielowi możliwości poszerzania materiału o zadania ciekawe lub trudniejsze. Pamiętajmy, że bardzo interesujące zadania na poziomie olimpiad matematycznych dotyczą teorii liczb, wielomianów i geometrii! Lekcje nie powinny być nudne, nawet dla zdolnego ucznia, który zdecydował się na program matematyki ograniczony do zakresu podstawowego.

Prezentowany program składa się z kilku części. Na początku wymieniono w nim najważniejsze cele edukacyjne i wychowawcze kształcenia w zakresie matematyki. Kolejną część poświęcono procedurom osiągania celów oraz metodom sprawdzania i oceny osiągnięć uczniów. Następnie omówiono materiał nauczania oraz przewidywane osiągnięcia uczniów. Program kończą uwagi na temat jego realizacji oraz orientacyjny przydział godzin.

Zrealizowanie celów nauczania wymaga czasu. Przy obowiązującej siatce godzin jest go niewiele. Do decyzji nauczyciela należy decyzja o realizacji propozycji zamieszczonych w programie  
i ewentualnych korektach. Nie można zakładać jednolitego schematu nauczania nawet w obrębie tego samego programu, a dobór form i metod nauczania należy dostosować do warunków  
w szkole: liczby uczniów, wyposażenia szkoły, planu zajęć itd.

Do niniejszego programu wydawnictwo Nowa Era przygotowuje pakiet złożony z podręczników dla uczniów i poradników metodycznych dla nauczycieli.

# Cele kształcenia

Nauka matematyki powinna wspomagać rozwój intelektualny ucznia, przygotowywać go do działań zespołowych, przyczyniać się do wszechstronnego kształtowania jego osobowości  
i pomagać mu w poznawaniu i rozumieniu problematyki rozwoju kraju i świata.

**Cele edukacyjne:**

* opanowanie umiejętności uogólniania przykładów, formułowania hipotez i twierdzeń, przeprowadzania prostych rozumowań dedukcyjnych;
* opanowanie umiejętności podawania przykładów i kontrprzykładów, definiowania pojęć  
  i posługiwania się definicjami;
* przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych; podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania; odróżnianie dowodu od przykładu;
* dostrzeganie regularności, podobieństw i analogii, formułowanie wniosków na ich podstawie i uzasadnianie ich poprawności;
* dobieranie argumentów do uzasadnienia poprawności sposobów rozwiązywania problemów; tworzenie ciągu argumentów gwarantujących poprawność rozwiązania i skuteczność w poszukiwaniu rozwiązań problemu;
* stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych;
* używanie języka matematycznego do tworzenia tekstów matematycznych, w tym do opisu rozumowań i uzasadniania wniosków, a także przedstawiania danych;
* wykształcenie umiejętności budowania modeli matematycznych różnorodnych sytuacji z życia codziennego oraz ich wykorzystywania do rozwiązywania problemów;
* tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie obiektów istniejących,  
  w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu;
* wskazywanie konieczności lub możliwości modyfikacji modelu matematycznego w przypadkach wymagających: specjalnych zastrzeżeń, dodatkowych założeń, rozważenia szczególnych uwarunkowań;
* opanowanie umiejętności potrzebnych do ilościowej oceny i opisu zjawisk;
* wykształcenie wyobraźni przestrzennej przez wyznaczanie związków metrycznych  
  i miarowych w figurach geometrycznych, także w otaczającej rzeczywistości;
* nauczenie wykrywania związków między liczbowymi parametrami zjawisk, szacowania wartości tych parametrów, opisywania związków pomiędzy nimi za pomocą równań  
  i nierówności, wykrywania między nimi zależności funkcyjnych lub rekurencyjnych, analizowania ich własności oraz wyznaczania ich stanów optymalnych i ekstremalnych;
* opanowanie umiejętności odczytywania własności związków opisanych wykresami, diagramami itp., konstruowanie wykresów;
* nauczenie wykonywania działań na liczbach i wyrażeniach algebraicznych;
* opanowanie umiejętności sporządzania notatek;
* opanowanie umiejętności korzystania z podręczników, pomocy naukowych, komputera, kalkulatora itp.

**Procesy wychowawcze:**

* nauka dobrej organizacji pracy, wytrwałości i systematyczności w dążeniu do osiągnięcia zamierzonych celów;
* kształcenie umiejętności logicznego rozumowania;
* wyrabianie samodzielności, dociekliwości i krytycyzmu;
* rozwijanie zdolności poznawczych;
* pobudzanie aktywności umysłowej;
* rozwijanie umiejętności prezentowania wyników własnej pracy i dowodzenia racji  
  z wykorzystaniem precyzyjnego języka matematyki;
* rozwijanie umiejętności współpracy w zespole i dyskutowania z wykorzystaniem argumentów merytorycznych.

# Procedury osiągania celów

Planując cykl lekcji poświęconych konkretnemu zagadnieniu (np. funkcji kwadratowej, zastosowaniom trygonometrii), warto zarezerwować czas na powtórzenie i usystematyzowanie omówionego materiału. Materiał ten można rozszerzyć o ciekawsze i trudniejsze zadania.

Wprowadzając nowe pojęcia, należy pamiętać o zasadzie stopniowania trudności. Rozpoczynamy od przykładów i zadań najprostszych, następnie przechodzimy do coraz bardziej skomplikowanych. W całym procesie nauczania matematyki ważną rolę odgrywa rozwiązywanie zadań. Istotne jest również zróżnicowanie ich tematyki. Dotyczy to także prac domowych. Monotonne powtarzanie takich samych czynności niszczy zainteresowanie matematyką.

Przybliżamy wprowadzane pojęcia, zwracając uwagę uczniów na ich powiązanie z życiem codziennym (pokażmy np., jak – znając procenty – można ocenić różne systemy kredytowania). Tematyka zadań powinna ukazywać zastosowania matematyki w różnych dziedzinach życia. Warto skłonić uczniów do samodzielnego wyszukiwania informacji w różnych źródłach i m.in. świadomego korzystania z danych statystycznych.

Istotne jest stosowanie pomocy naukowych: komputera, kalkulatora, tablic matematycznych, modeli, plansz, diagramów, wykresów itp. w sposób przemyślany i uzasadniony. Zamiast wykonywania skomplikowanych i monotonnych rachunków, ćwiczmy działania na kalkulatorze, bo ta umiejętność przyda się każdemu uczniowi. Zachowajmy jednak rozsądek – uczniowie nie powinni korzystać z kalkulatorów, wykonując proste obliczenia.

Oprócz tradycyjnego prowadzenia lekcji w formie wykładu, warto wprowadzać metody aktywizujące. Jedną z nich jest praca w małych grupach, 3‒4-osobowych. Wspólne zmaganie się  
z problemem jest skuteczniejsze i mniej stresuje niż wysiłek jednostkowy. Poszukiwanie błędów w pracach swoich i kolegów wyrabia nawyk samodzielnego sprawdzania rozwiązań. Ułatwia to również pracę w domu, która powinna być kontynuacją lekcji. Istotne jest także przyzwyczajenie uczniów do korzystania z podręczników i zbiorów zadań.

Umiejętność wykonywania dobrych notatek z lekcji bywa niedoceniana zarówno przez uczniów, jak i przez nauczycieli. Warto temu zagadnieniu poświęcić więcej uwagi.

W procesie dydaktycznym niezwykle ważne jest utrwalanie wiadomości i umiejętności oraz sprawdzanie stopnia ich opanowania. Służą do tego odpowiedzi ustne i pisemne prace klasowe, w tym testy jednokrotnego i wielokrotnego wyboru.

Tok nauczania powinien być jak najbardziej zindywidualizowany, szczególnie jeśli nauczyciel ma do czynienia z uczniami o zróżnicowanych zainteresowaniach i zdolnościach. Uczniom słabszym warto proponować zajęcia wyrównawcze, a szczególnie zainteresowanym przedmiotem ‒ zajęcia fakultatywne rozszerzające materiał omawiany na lekcjach.

Dobierając metody pracy, niezależnie od omawianych zagadnień, warto odpowiedzieć sobie na pytania: przed lekcją – czego chcemy uczniów nauczyć, a po niej – czego ich faktycznie nauczyliśmy. Uświadomienie sobie celów kształcenia znacznie zwiększa szansę ich realizacji.

Zamierzając osiągnąć cele wychowawcze, pamiętajmy, że najefektywniej się wychowuje, dając dobry przykład.

# Materiał nauczania i przewidywane umiejętności uczniów

## Klasa 1

(3 godziny tygodniowo, razem 105 godzin)

### Treści nauczania

1. **Liczby**
2. Działania w zbiorze liczb rzeczywistych, prawa i kolejność wykonywania działań
3. Wzory skróconego mnożenia: , oraz 
4. Wyłączanie wspólnego czynnika poza nawias w sumach algebraicznych
5. Liczby naturalne i całkowite, liczby pierwsze i liczby złożone
6. Liczby rzeczywiste, zapis dziesiętny liczby rzeczywistej, zamiana ułamków dziesiętnych okresowych na ułamki zwykłe
7. Potęga o wykładniku naturalnym i całkowitym oraz jej własności, potęga: iloczynu  
   i ilorazu potęg; mnożenie i dzielenie potęg przy takich samych podstawach
8. Potęga o wykładniku wymiernym
9. Pierwiastki kwadratowe i sześcienne, pierwiastki wyższych stopni (w tym pierwiastki nieparzystego stopnia z liczb ujemnych), związek pierwiastkowania z potęgowaniem, prawa działań pierwiastkach
10. Potęga o wykładniku wymiernym; własności monotoniczności potęgowania
11. Pojęcie logarytmu, własności logarytmów, związek logarytmowania z potęgowaniem, logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi
12. **Równania i nierówności**
13. Równoważność równań i równoważność nierówności
14. Nierówności liniowe, układ nierówności liniowych z jedną niewiadomą
15. Oś liczbowa, przedziały liczbowe
16. Działania na zbiorach
17. Wartość bezwzględna liczby, jej interpretacja algebraiczna i geometryczna
18. Równania i nierówności z wartością bezwzględną typu: , , 
19. Układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi, interpretacja układu równań oznaczonych, sprzecznych i nieoznaczonych (bez interpretacji geometrycznej), rozwiązywanie układów równań metodą podstawiania i metodą przeciwnych współczynników
20. Zastosowanie układów równań do rozwiązywania zadań tekstowych osadzonych  
    w kontekście praktycznym
21. **Funkcje i ich własności**
22. Definicja funkcji jako przyporządkowania , przykłady funkcji, funkcje używane w statystyce opisowej, tabele, diagramy, funkcje opisujące zjawiska przyrodnicze, ekonomiczne, socjologiczne itp.
23. Dziedzina funkcji, zbiór wartości funkcji, wyznaczanie dziedziny funkcji liczbowej określonej wzorem (także różnymi wzorami na różnych przedziałach)
24. Definicja wykresu funkcji liczbowej, wykresy funkcji opisujące zależności  
    w gospodarce i życiu codziennym – uwzględnienie różnych jednostek na osiach; odczytywanie z wykresu funkcji jej dziedziny i zbioru wartości oraz wartości największej (najmniejszej) osiąganej przez funkcję w dziedzinie lub w określonym przedziale; odczytywanie z wykresu argumentów, dla których funkcja przyjmuje określone wartości: 
25. Miejsce zerowe funkcji, odczytywanie z wykresu funkcji jej miejsc zerowych
26. Definicja funkcji monotonicznej na przedziale , wyznaczanie przedziałów monotoniczności funkcji na podstawie jej wykresu
27. Funkcja , jej wykres i własności wykorzystywane do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi
28. Przesunięcie wykresu funkcji  wzdłuż osi układu współrzędnych: , 
29. Przekształcanie wykresu funkcji  przez symetrie względem osi układu współrzędnych: , 
30. Wykresy funkcji



1. **Funkcja liniowa**
2. Od proporcjonalności prostej do funkcji 
3. Funkcja liniowa, interpretacja jej współczynnika kierunkowego i wyrazu wolnego; rysowanie wykresów funkcji liniowych; przesunięcie wykresu funkcji liniowej wzdłuż osi układu współrzędnych; punkty przecięcia wykresu funkcji liniowej z osiami układu współrzędnych



1. Monotoniczność funkcji liniowej
2. Wyznaczanie wzoru funkcji liniowej na podstawie jej wykresu (wykorzystywanie interpretacji współczynnika kierunkowego i wyrazu wolnego)
3. Równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty; współczynnik kierunkowy prostej
4. Współliniowość punktów
5. Równanie prostej w postaci ogólnej
6. Geometryczna interpretacja układów dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi
7. Wzajemne położenie dwóch prostych, wyznaczanie równania prostej o zadanych własnościach, jak: znany współczynnik kierunkowy, równoległość lub prostopadłość do innej prostej
8. **Funkcja kwadratowa I**
9. Szkicowanie wykresu funkcji kwadratowej na podstawie jej postaci kanonicznej
10. Interpretacja współczynników występujących we wzorze funkcji kwadratowej  
    w postaci kanonicznej; współrzędne wierzchołka paraboli
11. Dla kolejno wprowadzanych postaci funkcji i ich wykresów: , ,,odczytywanie z wykresu: dziedziny, zbioru wartości, wartości największych i wartości najmniejszych w dziedzinie lub na określonym przedziale, przedziałów monotoniczności, równania osi symetrii paraboli, liczby miejsc zerowych



1. Postać ogólna funkcji kwadratowej , wyprowadzenie wzoru



1. **Figury na płaszczyźnie I**
2. Figury wypukłe i niewypukłe
3. Liczba przekątnych w *n*-kącie wypukłym
4. Nierówność trójkąta
5. Trójkąty: ostrokątne, prostokątne, rozwartokątne; symetralna boku, dwusieczna kąta, wysokość, środkowa; twierdzenie o sumie kątów trójkąta; kąt zewnętrzny trójkąta
6. Przystawanie figur; przykłady cech przystawania figur na płaszczyźnie (odcinki, kwadraty, okręgi, kąty itp.)
7. Cechy przystawania trójkątów

### Przewidywane umiejętności uczniów

Po ukończeniu klasy pierwszej uczniowie powinni:

* wykonywać działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych;
* stosować wzory skróconego mnożenia: , oraz ;
* wyłączać wspólny czynnik poza nawias w sumach algebraicznych;
* przeprowadzać proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia;
* znać dowód na istnienie nieskończenie wielu liczb pierwszych;
* przedstawiać liczby rzeczywiste w różnych postaciach (np. ułamka zwykłego, ułamka dziesiętnego okresowego), z użyciem symboli pierwiastków, potęg;
* zamieniać ułamki zwykłe na ułamki dziesiętne okresowe i odwrotnie;
* porównywać liczby rzeczywiste;
* dowodzić niewymierności np. liczby ;
* stosować własności pierwiastków dowolnego stopnia, w tym pierwiastków stopnia nieparzystego z liczb ujemnych; stosować prawa działań na pierwiastkach (pierwiastek z iloczynu lub ilorazu dwóch liczb, włączanie liczby pod znak pierwiastka lub wyłączanie liczby spod znaku pierwiastka);
* stosować związek pierwiastkowania z potęgowaniem oraz prawa działań na potęgach i pierwiastkach;
* obliczać potęgi o wykładnikach wymiernych;
* stosować prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych: , , , , ;
* korzystać z podstawowych własności potęg (również w kwestiach związanych  
  z innymi dziedzinami wiedzy, np. fizyką, chemią, informatyką);
* stosować własności monotoniczności potęgowania, w szczególności własności: jeśli  oraz , to , a jeśli  i , to ;
* korzystać z pojęcia logarytmu;
* stosować związek logarytmowania z potęgowaniem;
* stosować w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi;
* przekształcać równania lub nierówności w sposób równoważny;
* interpretować równania i nierówności sprzeczne oraz tożsamościowe;
* używać pojęcia przedziału liczbowego, zaznaczać przedziały na osi liczbowej;
* wyznaczać część wspólną, sumę oraz różnicę przedziałów liczbowych;
* sprawdzać, czy dana liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania lub nierówności;
* rozwiązywać nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą oraz ich układy  
  i zapisywać wyniki w postaci przedziałów liczbowych;
* obliczać wartość bezwzględną liczb;
* stosować interpretację geometryczną wartości bezwzględnej;
* rozwiązywać równania typu: , ,  oraz nierówności typu: , ;
* interpretować układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi: oznaczonych, sprzecznych i nieoznaczonych;
* rozwiązywać układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi;
* stosować układy równań do rozwiązywania zadań tekstowych;
* określać funkcje za pomocą: wzoru, tabeli, wykresu, opisu słownego (także różnymi wzorami na różnych przedziałach);
* obliczać wartość funkcji danej wzorem algebraicznym;
* odczytywać i interpretować wartości funkcji określonych za pomocą: tabel, wykresów, wzorów itp., również w sytuacjach wielokrotnego użycia tego samego źródła informacji lub kilku źródeł jednocześnie;
* obliczać ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu; wyznaczać (poznanymi metodami rozwiązywania równań) argumenty, dla których funkcja przyjmuje daną wartość;
* rysować wykresy funkcji liczbowych danych tabelą;
* odczytywać z wykresu funkcji jej własności: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby (w szczególności liczbę rozwiązań równania , rozwiązania nierówności: , );
* znajdować na podstawie wykresu funkcji jej wartości największe (najmniejsze)  
  w dziedzinie lub jej podzbiorze (w szczególności w przedziale domkniętym);
* szkicować wykres funkcji  dla danego a, korzystać ze wzoru i wykresu tej funkcji do interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi;
* przekształcać wykresy funkcji (przesunięcia i symetrie względem osi układu);
* rysować wykres funkcji liniowej, korzystając z jej wzoru;
* wyznaczać wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o funkcji lub jej wykresie;
* interpretować współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej;
* wykorzystywać własności funkcji liniowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp., także osadzonych w kontekście praktycznym;
* posługiwać się równaniami prostych na płaszczyźnie w postaciach kierunkowej  
  i ogólnej;
* podawać interpretację geometryczną układów oznaczonych, nieoznaczonych i sprzecznych;
* wyznaczać równanie prostej o danych własnościach (jak: przechodzenie przez dwa punkty, znany współczynnik kierunkowy, równoległość lub prostopadłość do innej prostej);
* rozpoznawać wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie na podstawie ich równań, w tym znajdować wspólny punkt dwóch prostych, jeśli istnieje;
* interpretować współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej;
* szkicować wykres funkcji kwadratowej na podstawie jej wzoru;
* interpretować współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej;
* wyznaczać wzór funkcji kwadratowej na podstawie informacji o tej funkcji lub jej wykresie;
* rozpoznawać figury wypukłe;
* znać zależność między liczbą boków a liczbą przekątnych wielokąta wypukłego;
* stosować cechy przystawania trójkątów;
* przeprowadzać dowody geometryczne z zastosowaniem poznanych własności figur.

## Klasa 2

(4 godziny tygodniowo, razem 140 godzin)

### Treści nauczania

1. **Funkcja kwadratowa II**
2. Wartość największa i wartość najmniejsza funkcji kwadratowej
3. Miejsca zerowe funkcji kwadratowej; wyróżnik trójmianu kwadratowego i związek jego znaku z liczbą miejsc zerowych funkcji kwadratowej; postać iloczynowa funkcji kwadratowej
4. Równanie kwadratowe niepełne: , ; rozwiązywanie równań kwadratowych z wykorzystaniem wzorów na miejsca zerowe funkcji kwadratowej



1. Nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą
2. Przykłady równań wyższych stopni i równań wymiernych prowadzących do równań liniowych lub kwadratowych
3. Przykłady układów równań, z których jedno jest kwadratowe, a drugie – liniowe
4. Wyznaczanie punktów przecięcia prostych i paraboli (jeśli istnieją)
5. Wyznaczanie równania paraboli o danych własnościach
6. **Wielomiany i wyrażenia wymierne**
7. Wielomian jednej zmiennej, stopień wielomianu, wielomiany równe
8. Działania w zbiorze wielomianów: dodawanie, odejmowanie, mnożenie, redukcja wyrazów podobnych
9. Wzory skróconego mnożenia: , , , , 
10. Równania wielomianowe
11. Rozkład wielomianu na czynniki
12. Dzielenie wielomianów
13. Twierdzenie Bézouta i jego zastosowanie
14. Pierwiastki wielokrotne
15. Jednomian i wielomian wielu zmiennych
16. Wyrażenia wymierne, działania na wyrażeniach wymiernych
17. Równania wymierne postaci , gdzie wielomiany  i  zapisano w postaci iloczynowej
18. **Figury na płaszczyźnie II**
19. Symetria środkowa, symetria osiowa, twierdzenia o punktach przecięcia symetralnych boków, dwusiecznych kątów, środkowych i wysokości w trójkącie
20. Wielokąty foremne i ich podstawowe własności
21. Okręgi i proste, twierdzenie o odcinkach stycznych
22. Środek okręgu wpisanego w trójkąt, środek okręgu opisanego na trójkącie
23. Kąty w kole (kąt środkowy, kąt wpisany, kąt między styczną a cięciwą)
24. Pola i obwody figur
25. Związki miarowe w trójkącie prostokątnym (twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa)
26. Twierdzenie Talesa, twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa
27. Jednokładność
28. Podobieństwo, cechy podobieństwa trójkątów
29. **Trygonometria I**
30. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego
31. Związki między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego
32. Zastosowania funkcji trygonometrycznych
33. Funkcje trygonometryczne kąta wypukłego
34. Własności funkcji trygonometrycznych
35. **Funkcje wykładnicze i logarytmiczne**
36. Własności logarytmów – powtórzenie
37. Działania na potęgach i logarytmach – powtórzenie
38. Funkcja wykładnicza , jej wykres i własności wykorzystywane do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi
39. Funkcja logarytmiczna , jej wykres i własności wykorzystywane do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi

### Przewidywane umiejętności uczniów

Po ukończeniu klasy drugiej uczniowie powinni:

* wyznaczać największą i najmniejszą wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym;
* rozwiązywać zadania optymalizacyjne w sytuacjach, które można opisać funkcją kwadratową;
* wyprowadzać wzory na miejsca zerowe funkcji kwadratowej;
* wyznaczać wzór funkcji kwadratowej na podstawie informacji o tej funkcji lub o jej wykresie;
* interpretować współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej  
  w postaciach: kanonicznej, ogólnej i iloczynowej (jeśli istnieje);
* odczytywać z wykresu własności funkcji kwadratowej: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, rozwiązania nierówności: ;



* rozwiązywać równania kwadratowe niepełne oraz równania kwadratowe, które można sprowadzić do postaci iloczynowej, np. stosując wzory skróconego mnożenia: , , ; rozwiązywać równania kwadratowe, korzystając ze wzorów na miejsca zerowe funkcji kwadratowej;
* rozwiązywać metodą podstawiania układy równań, z których jedno jest kwadratowe, a drugie – liniowe, postaci  lub ;
* rozwiązywać nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą;
* wykorzystywać własności funkcji kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp., także osadzonych w kontekście praktycznym;
* dodawać, odejmować i mnożyć wielomiany jednej i wielu zmiennych;
* odczytywać pierwiastki wielomianu z jego postaci iloczynowej;
* obliczać wartości wyrażeń arytmetycznych (wymiernych);
* stosować wzory skróconego mnożenia: , , , , , w szczególności znosić niewymierność z mianownika;
* wyłączać jednomian z sumy algebraicznej poza nawias; rozkładać wielomiany na czynniki metodą wyłączania wspólnego czynnikaprzed nawias i metodą grupowania wyrazów;
* rozwiązywać równania wielomianowe, które można doprowadzić do postaci równania kwadratowego, w szczególności równania dwukwadratowe;
* rozwiązywać równania wielomianowe postaci  dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej lub takie, które można doprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias i metodą grupowania;
* dzielić wielomian jednej zmiennej  przez dwumian postaci ;
* znać dowód i stosować twierdzenie (Bézouta) o dzieleniu z resztą wielomianu przez dwumian postaci  wraz ze wzorami rekurencyjnymi na współczynniki ilorazu  
  i resztę (algorytm Hornera – dowód można przeprowadzić w szczególnym przypadku, np. dla wielomianu czwartego stopnia);
* znajdować pierwiastki całkowite wielomianu o współczynnikach całkowitych;
* wyznaczać dziedzinę wyrażenia wymiernego; dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić wyrażenia wymierne; skracać wyrażenia wymierne;
* rozwiązywać równania wymierne postaci , gdzie wielomiany  i  są zapisane w postaci iloczynowej;
* stosować własności symetrii środkowej, symetrii osiowej;
* wskazywać w trójkącie podstawowe punkty szczególne: ortocentrum, środek ciężkości; korzystać z ich własności;
* udowodnić twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa;
* rozpoznawać trójkąty: ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne przy danych długościach boków (m.in. stosować twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa);
* korzystać z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i trapezach;
* rozpoznawać wielokąty foremne i korzystać z ich podstawowych własności;
* wyznaczać promienie i średnice okręgów, długości cięciw okręgów oraz odcinków stycznych, także z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa;
* korzystać z własności stycznej do okręgu i własności okręgów stycznych;
* udowodnić twierdzenia o kątach w okręgu:

a) kąt wpisany jest połową kąta środkowego opartego na tym samym łuku;

b) kąty wpisane są równe wtedy i tylko wtedy, gdy są oparte na równych łukach;

* stosować związki pomiędzy: kątem środkowym, kątami wpisanymi i kątem między styczną a cięciwą koła (wyznaczonymi przez ten sam łuk);
* udowodnić twierdzenie: Jeśli odcinek *CD* jest wysokością trójkąta prostokątnego *ABC* o kącie prostym *ACB*, to ,  oraz ;
* stosować twierdzenie Talesa i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa;
* korzystać z cech podobieństwa trójkątów;
* korzystać z zależności między obwodami i między polami figur podobnych;
* przeprowadzać dowody geometryczne;
* wyznaczać wartości funkcji trygonometrycznych: sinus, cosinus i tangens kątów  
  o miarach od 0° do 180°, w szczególności wyznaczać wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów , , ;
* stosować proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi: ,  oraz ;
* korzystać z przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych (odczytanych z tablic lub obliczonych za pomocą kalkulatora);
* wyznaczać miarę kąta, znając wartość funkcji trygonometrycznej tego kąta;
* znając wartość jednej funkcji trygonometrycznej kąta, wyznaczać wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych tego kąta;
* korzystać z własności funkcji trygonometrycznych w obliczeniach geometrycznych;
* sporządzać wykresy funkcji wykładniczej (o różnych podstawach) i opisywać jej własności;
* korzystać z funkcji wykładniczych do opisu zjawisk fizycznych i chemicznych, a także w kwestiach osadzonych w kontekście praktycznym;
* sporządzać wykresy funkcji logarytmicznej (o różnych podstawach) i opisywać jej własności;
* korzystać z funkcji logarytmicznych do opisu zjawisk fizycznych i chemicznych,  
  a także w kwestiach osadzonych w kontekście praktycznym;

## Klasa 3

(3 godziny tygodniowo, razem 105 godzin)

### Treści nauczania

**I. Trygonometria II**

1. Twierdzenie sinusów, twierdzenie o dwusiecznej
2. Twierdzenie cosinusów
3. Pola wielokątów, wzór na pole trójkąta , pole i obwód koła; obliczanie pól, obwodów oraz związków miarowych z zastosowaniem poznanych wzorów i zależności trygonometrycznych
4. Obliczanie pól i obwodów figur, w tym pola wycinka koła i długości łuku okręgu
5. **Geometria analityczna**
6. Odległość na płaszczyźnie kartezjańskiej, odległość dwóch punktów, współrzędne środka odcinka
7. Odległość punktu od prostej
8. Równanie okręgu w postaci , nierówność opisująca koło
9. Wzajemne położenie prostej i okręgu
10. Przekształcanie figur na płaszczyźnie kartezjańskiej przez symetrie
11. Figury na płaszczyźnie kartezjańskiej – zadania
12. **Ciągi liczbowe**
13. Definicja ciągu liczbowego – funkcji, której dziedziną jest zbiór (lub podzbiór) liczb naturalnych; ciąg skończony i nieskończony
14. Monotoniczność ciągu
15. Ciąg arytmetyczny, wzór na *n*-ty wyraz oraz sumę *n* początkowych wyrazów, wyraz środkowy jako średnia arytmetyczna wyrazów sąsiednich, monotoniczność ciągu arytmetycznego
16. Ciąg geometryczny, wzór na *n*-ty wyraz oraz sumę *n* początkowych wyrazów, zależność



1. Procent składany, oprocentowanie lokat i kredytów bankowych, sprzedaży ratalnej itp.
2. **Kombinatoryka, rachunek prawdopodobieństwa oraz elementy statystyki opisowej**
3. Proste zadania kombinatoryczne uwzględniające losowanie kolejno ze zwracaniem i bez zwracania oraz losowanie podzbiorów danego zbioru
4. Reguła mnożenia i dodawania (także łącznie) dla dowolnej liczby czynności  
   w prostych sytuacjach kombinatorycznych
5. Doświadczenia losowe, zdarzenia losowe, zbiór zdarzeń elementarnych, działania na zdarzeniach: zdarzenie pewne, zdarzenie niemożliwe, koniunkcja i alternatywa zdarzeń, zdarzenie przeciwne, zdarzenia wykluczające się
6. Klasyczna definicja prawdopodobieństwa i jego podstawowe własności
7. Obliczanie prawdopodobieństw zdarzeń w skończonych przestrzeniach probabilistycznych, zastosowanie własności prawdopodobieństwa
8. Elementy statystyki opisowej: badanie próby losowej i jej opis za pomocą liczb charakterystycznych, średnia arytmetyczna, średnia ważona, mediana, dominanta, wariancja i odchylenie standardowe, przykłady badań statystycznych GUS, skala centylowa
9. Wartość oczekiwana, np. przy ustalaniu wysokości wygranej w prostych grach losowych i loteriach

### Przewidywane umiejętności uczniów

Po ukończeniu klasy trzeciej uczniowie powinni:

* udowodnić i stosować twierdzenie sinusów;
* udowodnić i stosować twierdzenie cosinusów;
* obliczać kąty trójkąta i długości jego boków przy odpowiednich danych (rozwiązywać trójkąty);
* udowodnić i stosować wzór na pole trójkąta: ;
* udowodnić i stosować twierdzenie o dwusiecznej;
* stosować funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich i do obliczania pól figur; obliczać pole wycinka koła i długość łuku okręgu;
* wyznaczać współrzędne środka odcinka; obliczać odległość dwóch punktów;
* obliczać odległość punktu od prostej;
* stosować równanie okręgu w postaci: ;
* znajdować punkty wspólne prostej i okręgu;
* znajdować obrazy niektórych figur geometrycznych (punktu, prostej, odcinka, okręgu, trójkąta itp.) w symetrii osiowej względem osi układu współrzędnych i symetrii środkowej względem początku układu;
* wyznaczać równania prostych równoległych i prostopadłych do danej prostej przechodzącej przez dwa punkty, w szczególności równania stycznych do okręgów, dwusiecznych kątów itp.;
* wyznaczać wyrazy ciągu liczbowego określonego wzorem ogólnym;
* podawać przykłady ciągów liczbowych skończonych i nieskończonych;
* obliczać początkowe wyrazy ciągów określonych rekurencyjnie;
* sprawdzać monotoniczność ciągu;
* sprawdzać, czy dany ciąg jest arytmetyczny, czy geometryczny;
* wyprowadzać i stosować wzory na *n*-ty wyraz i sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego;
* wyprowadzać i stosować wzory na *n*-ty wyraz i sumę *n* początkowych wyrazów ciągu geometrycznego;
* stosować zależność między trzema sąsiednimi wyrazami ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego;
* wykorzystywać własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym;
* stosować własności ciągu geometrycznego do rozwiązywania zadań związanych  
  z bankowością (lokaty i kredyty), w szczególności korzystać z pojęcia procentu składanego, obliczać podatki i zysk z lokat;
* zliczać obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych;
* zliczać obiekty, stosując reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) dla dowolnej liczby czynności;
* obliczać prawdopodobieństwo w przykładach wykorzystujących klasyczną definicję prawdopodobieństwa, stosując jego elementarne własności;
* obliczać średnią arytmetyczną i średnią ważoną; wyznaczać medianę i dominantę;
* obliczać odchylenie standardowe zestawu danych (także w przypadku danych odpowiednio pogrupowanych) i interpretować ten parametr dla danych empirycznych;
* obliczać wartość oczekiwaną, np. przy ustalaniu wysokości wygranej w prostych grach losowych i loteriach;
* stosować skalę centylową;
* obliczać odchylenie standardowe zestawu danych (także w przypadku danych odpowiednio pogrupowanych), interpretować odchylenie standardowe zestawu danych dla danych empirycznych;
* krytycznie analizować dane doświadczalne (badania statystyczne) i ich graficzne reprezentacje, operować podstawowymi charakterystykami liczbowymi zestawów danych.

## Klasa 4

(4 godziny tygodniowo, razem 104 godziny)

### Treści nauczania

1. **Stereometria**
2. Proste i płaszczyzny w przestrzeni
3. Równoległość i prostopadłość w przestrzeni
4. Twierdzenie o trzech prostych prostopadłych (bez dowodu)
5. Kąt nachylenia prostej do płaszczyzny
6. Kąt dwuścienny
7. Graniastosłupy, graniastosłupy prawidłowe i proste, prostopadłościany, przekroje prostopadłościanów
8. Ostrosłupy, ostrosłupy prawidłowe, twierdzenie o ostrosłupie, który ma wszystkie krawędzie boczne równej długości
9. Bryły obrotowe: walec, stożek, kula, sfera
10. Pola powierzchni i objętości wielościanów – powtórzenie wzorów i obliczenia, również z zastosowaniem trygonometrii
11. Pola powierzchni i objętości brył obrotowych – obliczenia, również z zastosowaniem trygonometrii
12. **Powtórzenie przed maturą**
13. Dowody w algebrze
14. Dowody w geometrii
15. Powtórzenie przed maturą

### Przewidywane umiejętności uczniów

Po ukończeniu klasy czwartej uczniowie powinni:

* rozpoznawać wzajemne położenie prostych w przestrzeni, w szczególności nieprzecinające się proste prostopadłe;
* posługiwać się pojęciami kąta między prostą a płaszczyzną i kąta dwuściennego między półpłaszczyznami;
* rozpoznawać w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi itp.), obliczać miary tych kątów;
* rozpoznawać w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami a płaszczyznami (między krawędziami a ścianami, miedzy przekątnymi a ścianami), obliczać miary tych kątów;
* określać, jaką figurą jest dany przekrój prostopadłościanu płaszczyzną;
* stosować twierdzenie o ostrosłupie, który ma wszystkie krawędzie boczne równej długości;
* rozpoznawać w walcach i stożkach kąty między odcinkami oraz kąty między odcinkami a płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą a podstawą stożka), obliczać miary tych kątów;
* wykorzystywać zależność między objętościami brył podobnych;
* obliczać objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka  
  i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii;
* przeprowadzać dowody w zakresie zagadnień z algebry;
* przeprowadzać dowody geometryczne.

# Propozycja metod kontroli i oceny osiągnięć uczniów

Jednym z najtrudniejszych zadań nauczyciela jest sprawdzanie i ocenianie osiągnięć uczniów. Jego prawidłowe wykonanie jest niezbędne dla:

* ucznia, bo potwierdza lub kwestionuje jego samoocenę (a tym samym uczy właściwego oceniania samego siebie); jest sygnałem do uzupełnienia niedociągnięć; motywuje do dalszego kształcenia oraz rozwijania własnych uzdolnień i zainteresowań;
* nauczyciela, bo dostarcza informacji o poprawności stosowanych metod nauczania oraz stopniu osiągnięcia zamierzonych celów edukacyjnych.

Matematyka jest dyscypliną nauki, w której umiejętności tylko pozornie są łatwe do oceny. Częstym błędem jest np. klasyfikowanie pisemnych rozwiązań zadań wyłącznie w dwóch kategoriach: zrobione błędnie, zrobione bezbłędnie. Tymczasem można tak postępować tylko  
w stosunku do testów. Największą trudność sprawia ustalenie, w jakim stopniu uczeń rozumie to, co robi. Ważne jest więc stawianie mu pytań sprawdzających zrozumienie kolejnych etapów pracy. Metody sprawdzania osiągnięć ucznia powinny więc być różnorodne. Nie należy przy tym każdego sprawdzania umiejętności kończyć oceną wyrażoną stopniem. Uczeń powinien kształcić się na własnych błędach i twórczo poszukiwać właściwych rozwiązań. Nie wolno dopuszczać do sytuacji, w której strach przed negatywną oceną paraliżuje i odbiera chęć aktywnego uczestniczenia w lekcji. Swobodne wypowiedzi są dla nauczyciela wskazówką, czy proces dydaktyczny przebiega prawidłowo.

Uczniom warto zadawać przygotowanie publicznej prezentacji rozwiązania problemu, który wcześniej opracują w 2‒3-osobowych grupach. Takie zadanie skutecznie motywuje do starań  
o dokładne zrozumienie tematu. Podczas prezentowania wyników pracy przez **jednego**z członków grupy należy dociekliwie pytać: „skąd ten wniosek?”, „dlaczego?”, „czy zawsze?”,  
„czy dla dowolnych?” itd. Uczniowie przyzwyczajeni do takiej formy pracy zwykle zadają sobie nawzajem podobne pytania podczas przygotowywania prezentacji. Jest to bardzo efektywny sposób nauki, a dla nauczyciela prezentacja jest jedną z najlepszych metod sprawdzenia, czy pojęcia i teorie matematyczne, zwłaszcza trudniejsze, zostały przez uczniów zrozumiane.

Uczniom należy zadawać pracę do domu, ale taka praca spełni swoje zadanie pod warunkiem, że nauczyciel skontroluje poprawność jej wykonania (co jednak nie powinno łączyć się  
z wystawianiem stopnia).

Nie należy jednak rezygnować z tradycyjnej formy odpowiedzi ustnej ocenianej stopniem. Uczeń powinien umieć zaprezentować swoje umiejętności nawet w dużym stresie. Warto tak zaplanować lekcje, aby w ciągu semestru każdy uczeń otrzymał przynajmniej jedną ocenę  
z odpowiedzi ustnej.

Pisemne sprawdziany wiadomości to zwykle kartkówki, prace klasowe oraz różnego rodzaju testy. Krótkie kartkówki są wygodną formą kontroli umiejętności nabytych w trakcie ostatnich (3‒4) lekcji. Służyć powinny raczej do oceny sprawności rachunkowej, znajomości i stosowania definicji itp., niż do rozwiązywania zadań problemowych. Po większej partii materiału przeprowadza się na ogół godzinne prace klasowe. Przygotowanie prawidłowego zestawu zadań jest dla nauczyciela swoistym wyzwaniem, bo:

* zadań nie powinno być więcej niż trzy, cztery;
* powinny one mieć zróżnicowany stopień trudności;
* rozwiązania powinny dać możliwość oceny pracy w pełnej skali, od niedostatecznej do celującej;
* rozwiązywanie niektórych problemów powinno dawać szanse na wykazanie się myśleniem twórczym.

To tylko niektóre z cech dobrze opracowanej pracy klasowej.

Coraz częściej stosowaną formą pracy pisemnej jest test. Młodzi ludzie wcześniej czy później spotkają się z taką formą sprawdzianu, warto więc ćwiczyć z nimi umiejętność ich rozwiązywania. Praktyka dowodzi, że bez wcześniejszego treningu nawet osobie dobrze przygotowanej merytorycznie trudno prawidłowo rozwiązać egzamin w formie testu.

Zdaniem autora niezwykle ważne jest staranne, rzetelne, w pełni profesjonalne przygotowanie każdego sprawdzianu. Stosując obowiązujący w Polsce system oceniania, należy zadbać o przejrzystość kryteriów i konsekwencję w ich stosowaniu. Wiadomo, jak bardzo niesprawiedliwa lub nieuzasadniona ocena potrafi zniechęcić do nauki.

Zadaniem każdego nauczyciela jest opracowanie na początku roku szkolnego Przedmiotowego Systemu Oceniania zgodnego z Wewnątrzszkolnym Systemem Oceniania. Obydwa dokumenty, zatwierdzone przez Radę Pedagogiczną, powinny uwzględniać specyfikę szkoły, środowisko uczniów, profil klasy itp. Szczegółowe zasady oceniania wewnątrzszkolnego określa statut szkoły, z uwzględnieniem przepisów zawartych w rozporządzeniu Ministra Edukacji Narodowej z dnia 19 kwietnia 1999 r. (z późniejszymi zmianami) w sprawie zasad oceniania, klasyfikowania  
i promowania uczniów i słuchaczy oraz przeprowadzania egzaminów i sprawdzianów w szkołach publicznych. Prezentowany niżej katalog wymagań programowych należy zatem traktować jako propozycję do rozważenia, wymagającą dostosowania do sytuacji każdej klasy. Dotyczy to zwłaszcza podziału wymagań na dwie kategorie: podstawowe i ponadpodstawowe.

# Orientacyjny przydział godzin lekcyjnych

|  |  |
| --- | --- |
| **KLASA 1**  3 godziny × 35 tygodni = 105 godzin |  |
| Liczby rzeczywiste | 19 |
| Równania i nierówności | 20 |
| Funkcje | 23 |
| Funkcja liniowa | 16 |
| Funkcja kwadratowa I | 9 |
| Figury na płaszczyźnie I | 8 |
| Godziny do dyspozycji nauczyciela | 10 |

|  |  |
| --- | --- |
| **KLASA 2**  4 godziny × 35 tygodni = 140 godzin |  |
| Funkcja kwadratowa II | 24 |
| Wielomiany i wyrażenia wymierne | 30 |
| Figury na płaszczyźnie II | 24 |
| Trygonometria I | 24 |
| Funkcje wykładnicza i logarytmiczna | 12 |
| Godziny do dyspozycji nauczyciela | 26 |

|  |  |
| --- | --- |
| **KLASA 3**  3 godziny × 35 tygodni = 105 godzin |  |
| Trygonometria II | 18 |
| Geometria analityczna | 24 |
| Ciągi | 16 |
| Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa | 16 |
| Statystyka | 6 |
| Godziny do dyspozycji nauczyciela | 25 |

|  |  |
| --- | --- |
| **KLASA 4**  4 godz. × 26 tyg. = 104 godzin |  |
| Stereometria | 22 |
| Dowody w algebrze i geometrii | 12 |
| Powtórzenie materiału przed maturą | 50 |
| Godziny do dyspozycji nauczyciela | 20 |